第4章　低サイクル疲労

4-3「応力−ひずみ曲線」の数理処理

■ 数式は科学の言葉である

本題から少し外れることをお許し願いたい。

唐突だが、こんな川柳がある。

「数式を　目にした途端　本を閉じ」

こう詠われるほど、「数式」は敬遠されがちである。技術者と言われる人達でさえ、数式アレルギーの人が多いように感じる。

ここまで、この技術コラムでは抑制しながらも躊躇せず数式を使い、表現してきた。それは、数式が正確かつ簡潔に伝わる手段であると考えているからだ。

数式を敬遠する人々に共通する意識がある。記号アレルギーである、ということだ。数学記号を見た途端、思考停止状態に陥るのである。

数式アレルギー中毒の方にはあまり慰めにならないと思うが、ここで、多少の解毒剤を提供しておこう。

記号は、所詮、言葉・文章の一種である、ということだ。
日常、若い人たちがメールのやり取りに使っている「絵文字」と同じようなものである。
その概念に対する長い説明文を「連想しやすい簡単な記号」で置き換えただけである。
このことを改めて認識されたい。

それを使うメリットは、記号の組み合わせによって長い物語を簡潔に表現できるからだ。これによって、ある考えを推し進めていく場合やそれを他人に伝える場合、正確かつ迅速に成し遂げることができる為である。

繰り返すが、記号・数式は言葉である。科学の言葉といっても良い。そこには論理的な物語が内包されているのである。

従って、数式に対しては、丁寧に辛抱強く読み、解きほぐしていけば、大抵、理解できるはずである。
大胆に言い切ってしまうが、理解できないワケは、「書き手の説明の仕方がお粗末」か、又は、「読み手が未だそこまでのレベルに達していない」か、どちらかだ。

この技術コラムでは、少なくとも、前者にならないように配慮したいと思っている。

ところで、数式と言えば、あまたの数式の中で筆者にとって最も印象に残っている数式がある。
それは、以下の「オイラーの公式(等式)」だ。

$$e^{i\pi}=-1$$

いつ見てもまことに不可思議で美しい式だと思う。
これをじっと眺め、いつかは「直観で解るオイラーの公式」に関する解説文を書きたいと思っているが、残念ながら、今はただ、以下の狂歌を創作しただけである。

「アイとパイ　イーに累乗　してみれば
　　　　　マイナスイチに　なる神秘さよ」

お粗末さまです。(^o^)/

■「繰返し"応力−ひずみ"曲線」を形成するものは？

さて本題に戻ろう。

まず、(4の2)章の最後で触れたこの設問から取り上げよう。

(1)安定化した材料特性値を如何に採るか？

先に述べたように、安定化した材料特性として代表的なものは繰返し"応力ーひずみ"曲線である。
これは、言うまでもなく、繰返し負荷を掛けて安定になった状態での"応力ーひずみ"曲線を指す。
一体、これはどういう考えで形式・定式化されているのだろうか？

それを以下に示そう。

(4の1)章で触れたように、塑性域まで含めた繰返しはヒシテリシスループを形成する。
従って、ともかく何らかの実験手法にて繰返し負荷を掛け、このヒシテリシスループを安定化させる必要がある。
但し、ヒシテリシスループの大きさは種々様々、それこそ無限にあるのでその対処法を考え出さなければならない。

その方法として、便宜的に、大きさの異なる幾つかのこの

安定化されたヒシテリシスループ(Stabilized Hysteresis Loop)を重ね合わせ、それぞれのヒシテリシスループの先端(Tips)を結んだ曲線が編み出された。そして、これは繰返し"応力-ひずみ"曲線と定められた。(図4.10)

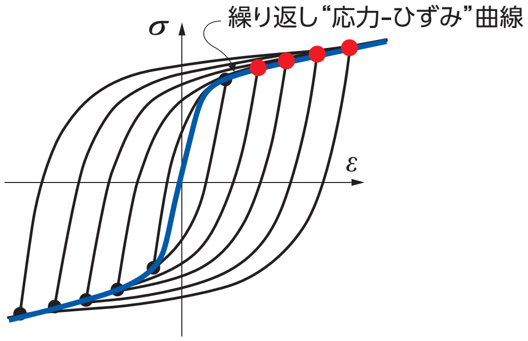

図4.10 繰り返し“応力-ひずみ”曲線

読者の中には、「この考えははたして妥当だろうか?」と疑念を抱く人がいるかも知れない。

しかし、この考えが受け入れられる理由がある。

それは、「安定化されたヒシテリシスループ」の先端は、紛れもなく、安定化した"応力-ひずみ"値の一部である、ということだ。更に拡張して、大きさの違う「安定化されたヒシテリシスループ」の連続性を考慮してループの先端を繋いでいけば、その一連の曲線は、紛れもなく、安定化した"応力-ひずみ"曲線の一部となる、と言えよう。

又、この考えによって得られた"応力-ひずみ"曲線と実際の測定された安定化した"応力-ひずみ"曲線は、結果的に、ほぼ同じとなっているようだ。

尚、図4.10の考えにおいて、隣り合うヒシテリシスループ間は、当然、補間した値が採られることになる。

話の次の段階として、ヒシテリシスループの先端を結んだ曲線、即ち、繰返し"応力-ひずみ"曲線の回帰式を示すつもりだ。

但し、これを説明する前に、まず、材料特性を表現する代表的な単発測定での単調"応力-ひずみ"曲線に関する回帰式(実験式)を先に示しておきたい。

■ 先ずは「単調"応力-ひずみ"曲線」の実験式を知ろう

ここで、単調"応力ーひずみ"曲線(Monotonic Stress-Strain Curve)に関する回帰式(実験式)について述べておこう。

前述したように、全ひずみε_tは弾性ひずみε_eと塑性ひずみε_pで構成されている。(図4.11)

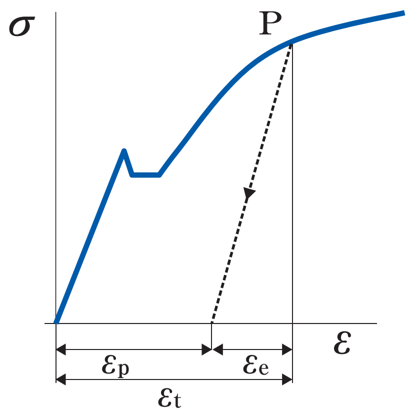

図4.11 弾性ひずみと塑性ひずみ

即ち、

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p \qquad (4.3.1)$$

ここで、弾性域での応力σと弾性ひずみε_eは線形の関係があるので、フックの法則を使い、縦弾性係数Eを介して、次のようになる。

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \qquad (4.3.2)$$

塑性域に関しては、殆どの金属が応力と塑性ひずみの関係をLog-Logプロットすれば直線で近似できる。(図4.12)

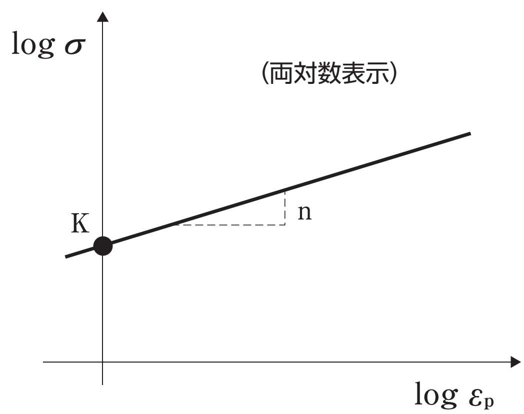

図4.12 応力と塑性ひずみの関係

従って、結果的に、塑性域の曲線は次のようなべき関数となる。

$$\sigma = K(\varepsilon_p)^n$$

尚、ここで、

K ：**強さ係数**（Strength Coefficient）
n ：**ひずみ硬化指数**（Strain Hardening Exponent）

と言われている。

$$\therefore \quad \varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.3.3}$$

従って、(4.3.1)式は、(4.3.2)式と(4.3.3)式の代入により、以下のように書き換えられる。

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.3.4}$$

これが、単調"応力-ひずみ"曲線に関する回帰式である。

■「繰返し"応力-ひずみ"曲線」の実験式を知ろう

さてここで、肝心の繰返し"応力-ひずみ"曲線の回帰式を求めよう。

先に単調"応力-ひずみ"曲線の回帰式(4.3.4)を求めた。繰返し"応力-ひずみ"曲線に関してもそれと同様なアプローチが適用できる。

繰返しを受け安定化された応力と塑性ひずみの関係をLog-Logプロットすれば、概ね直線で近似でき、単調"応力-ひずみ"の場合と同様に以下の式が得られる。

$$\sigma = K'(\varepsilon_p)^{n'} \tag{4.3.5}$$

但し、ここで、

σ ：繰返し負荷で安定した応力
ε_p：繰返し負荷で安定した塑性ひずみ
K'：**繰返し強度係数**
n'：**繰返し硬化指数**

である。

記号にダッシュが付いているのは「安定化した特性」という意味を示唆している。

ここの「繰返し強度係数」は塑性部の傾きであり、「繰返し硬化指数」は曲線部の曲がり度合いを示していよう。

ついでに、繰返し硬化指数の値に言及すれば、ほとんどの金属では0.10〜0.25であり、平均的には0.15辺りのようだ。

さて、(4.3.5) 式は次のように変形できる。

$$\therefore \quad \varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \tag{4.3.6}$$

全ひずみ ε_tは

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{4.3.7}$$

であるので、結局、全ひずみは以下のようになる。

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \tag{4.3.8}$$

これが**ランベルグ・オスグッドの式**(Ramberg-Osgood Equation)と言われ、繰返し"応力ーひずみ"曲線の回帰式となる。